

入試問題で遊んでみる

・・・2006年度東京大学入試問題(数学・理系 第2問)・・・

このサイトとは何の関係もないですが、ちょっと気になったので遊んでみることにしました。ちなみに今年の東大の入試問題は難しかったのかどうかは知りません・・・(京大の数学は過去最易と思えるぐらい易しかったんですが・・・私でも5問はできた)。

それはさておき、何を遊んでみたかは後まわしにして、とりあえずこの問題を解いてみましょう。なお、こちらとしては一応あっているつもりですが、正確性は保障しません。

第 2 問

コンピュータの画面に、記号○と×のいずれかを表示させる操作を繰り返し行う。このとき、各操作で、直前の記号と同じ記号を続けて表示する確立は、それまでの経過に関係なく、 p であるとする。

最初に、コンピュータの画面に記号×が表示された。操作を繰り返し行い、記号×が最初のものを含めて3個出るよりも前に、記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし、記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

- (1) (略)
- (2) $n \geq 3$ のとき、 P_n を p と n で表せ

解答

$n \geq 3$ のとき、題意を満たす並び方は次の通り(「(×)」は最初の×とする)

- (×) ○○・・・(全部で n 個)・・・○○ (①とする)
- (×) ○○・・・(全部で $n-r$ 個)・・・○○×○・・・(全部で r 個)・・・○○ (②とする)
- (×) ×○○・・・(全部で n 個)・・・○○ (③とする)

①になる確率は、

$(1-p)p^{n-1}$ で、これは1通りある。

②になる確率が、

$(1-p)p^{n-r-1}(1-p)(1-p)p^{r-1}=(1-p)^3 p^{n-2}$ で、これは×の位置を考えると、 $n-1$ 通りある。

③になる確率は、

$p(1-p)p^{n-1}=(1-p)p^n$ で、これは1通りある。

①～③は互いに背反なので、結局、 P_n は

$$\begin{aligned} P_n &= (1-p)p^{n-1} + (n-1)(1-p)^3 p^{n-2} + (1-p)p^n \\ &= (1-p)p^{n-2}\{(n-1) - (2n-3)p + np^2\} \end{aligned}$$



ここまでならばただの入試問題を解いただけですが、さて、ここからが問題で、実際にコンピュータの画面に○と×を出してみたらどうなるかが疑問ですね。この問題はコンピュータで確かめなくては・・・. ということで確かめてみました。

実験の条件

- (1) 「○」が設定した n 回出るか、「×」が 3 回出るかまで繰り返し出力し、それを 10 万回繰り返してそのうち題意を満たす状況になった回数を数えて確率を出す。
- (2) $n=3 \cdots 50$ について行う。
- (3) $p=0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ について行う
- (4) 実験して出した確率と理論値(上の答えに p や n を代入して求める)を比べ、その誤差(%)を算出する

で、その結果をグラフにしたのが下の Fig 1 です。

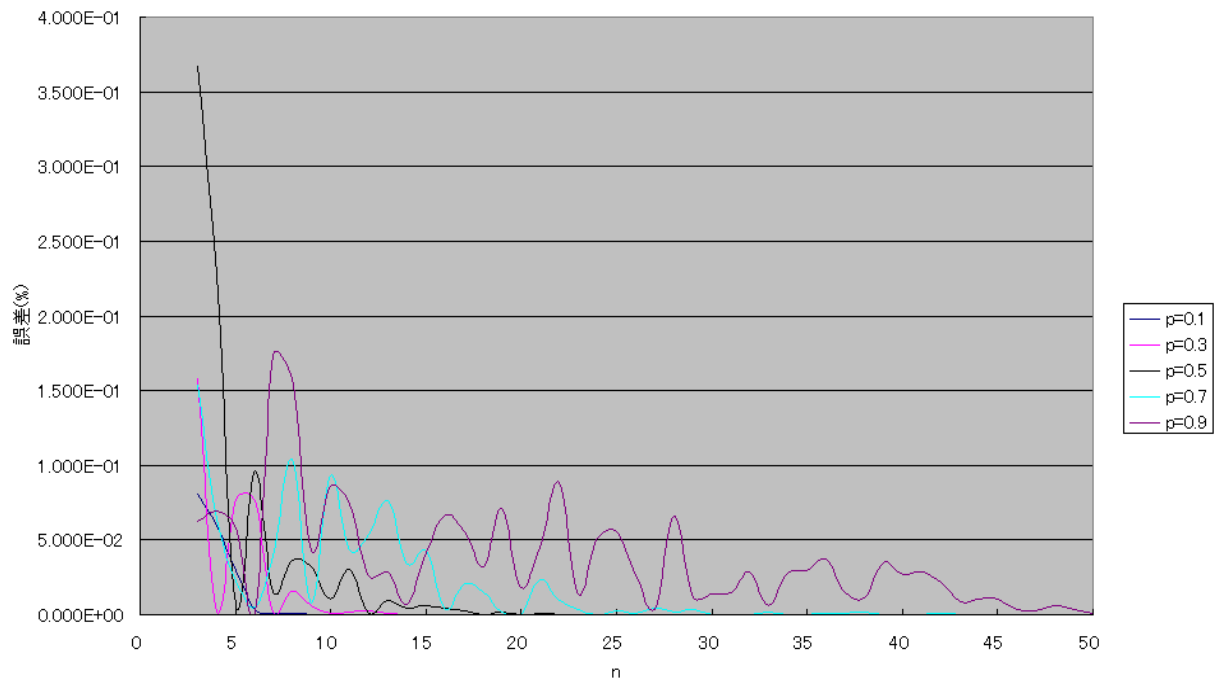


fig1 計算機によるPnの実験データ

これによると、まあまああっている結果だといえそうです。(最大でも誤差 0.5%以下であることが読み取れるため)

今回は難しかったでしょうか・・・.